Скобки и знаки

Опора каждого следующего преобразования. Подстановка чисел ловит неверное равенство, но верного не доказывает.

Плюс и минус перед скобкой

Знак перед скобкой — множитель: плюс это 1, минус это -1. Раскрыть скобку значит умножить на него каждое слагаемое.

$$a + (b - c) = a + b - c \qquad a - (b - c) = a - b + c$$

После плюса переписывают как было. После минуса знак меняется **у каждого** слагаемого, а не у первого.

Проверка на числах: $7 - (3 - 5) = 7 - 3 + 5 = 9$. Если вышло -1, минус дошёл не до всех.

Множитель на скобку

Множитель умножают на каждое слагаемое скобки — на все, сколько бы их ни было.

$$k(a + b + c) = ka + kb + kc$$

Множителем бывает число, буква, одночлен — и минус: $-(a + b)$ это $(-1)(a + b)$.

$2(x + 3) = 2x + 6$, а не $2x + 3$: при $x = 1$ слева 8, справа 5.

Скобка на скобку: каждое с каждым

Каждое слагаемое первой скобки умножают на каждое слагаемое второй. Слагаемых до приведения подобных — произведение их количеств.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Двучлен на двучлен — четыре слагаемых, на трёхчлен — шесть. Вышло меньше до приведения подобных — пропущено произведение.

Отсюда берутся формулы сокращённого умножения: $(a + b)(a + b)$ — тот же перебор.

Ловушка: минус до конца не дошёл

Три записи, в которых минус остановился на полпути. Каждая выглядит как раскрытие скобок и им не является.

- ☐ $a - (b + c) \neq a - b + c$ — верно $a - b - c$.
- ☐ $-(a - b) \neq -a - b$ — верно $-a + b$.
- ☐ $-2(x - 3) \neq -2x - 6$ — верно $-2x + 6$.

Признак один: минус — это множитель -1, а множитель доходит до каждого слагаемого скобки. Остановился на первом — раскрытия не было.

Подобные слагаемые

Подобные слагаемые — с одинаковой буквенной частью. Складывают только их, и только коэффициенты: буквенная часть не меняется.

- ☐ $3a + 2a = 5a$ — буквенная часть a осталась прежней.
- ☐ $3a + 2a^2$ не складывается: a и a^2 — разные буквенные части.
- ☐ $3ab + 2ba = 5ab$: порядок букв не важен, ab и ba — одна буквенная часть.
- ☐ $a + a = 2a$, а $a \cdot a = a^2$: сложение считает штуки, умножение — степени.

У одинокой буквы коэффициент 1: $a - 3a = -2a$.

Вычитание — это прибавление противоположного

$a - b$ и $a + (-b)$ — одна и та же запись. Поэтому цепочку сложений и вычитаний читают как сумму, а слагаемые переставляют вместе со знаками.

$$a - b = a + (-b) \qquad a - b = -(b - a)$$

Переставлять можно, отрывать знак от слагаемого — нельзя: $3 - 5x$ это $-5x + 3$, а не $5x - 3$.

Проверка на числах: $3 - 5 = -2$ и $-(5 - 3) = -2$.

Минус на минус

Минусы перед множителями считают: чётное их число даёт плюс, нечётное — минус. У деления так же.

$$(-a)(-b) = ab \qquad (-a)b = -ab$$

Отсюда $-(-a) = a$, и отсюда же $+c$ в $a - (b - c) = a - b + c$: минус перед скобкой встретил минус слагаемого.

Порядок действий

Действия выполняют не подряд, как написано, а по старшинству.

- ☐ Скобки — первыми, изнутри наружу.
- ☐ Степень.
- ☐ Умножение и деление — слева направо.
- ☐ Сложение и вычитание — слева направо.

Отсюда $-3^2 = -9$: возводится 3, минус остаётся снаружи. Чтобы возвести -3, нужны скобки: $(-3)^2 = 9$.

«Слева направо» решает у деления и вычитания: $12 : 2 \cdot 3 = 18$, а не 2.