Степени

Свойства степени и то, что из них не следует. Подстановка чисел ловит неверное равенство, но верного не доказывает.

Что такое степень

Степень — короткая запись одинаковых множителей: a — основание, n — показатель. Показатель считает множители, а не слагаемые.

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \qquad a^1 = a$$

Так читается только натуральный показатель. Ноль и минус в показателе определяются отдельно.

$2^3 = 8$, а $3^2 = 9$: основание и показатель местами не меняются.

Одно основание: показатели складывают и вычитают

Основание одно и то же: при умножении показатели складывают, при делении вычитают. Само основание не меняется.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Основания разные — правила нет: $a^2 \cdot b^3$ короче не записывается. При делении основание не ноль.

Числа считают отдельно от букв: $3a^2 \cdot 4a^3 = 12a^5$. Читают и в обе стороны: $a^7 = a^3 \cdot a^4$.

Степень степени

Степень возводят в степень — показатели перемножают. Основание опять не меняется.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Умножение степеней и возведение степени в степень путают чаще всего: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, а $(a^2)^3 = a^6$.

Обратный ход нужен так же: $a^6 = (a^2)^3 = (a^3)^2$.

Степень произведения и степень дроби

Показатель распределяется по множителям и по дроби — и только по ним. Знаменатель не ноль.

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Числовой множитель возводится тоже: $(2a)^3 = 8a^3$, а не $2a^3$.

В обратную сторону это вынесение общего показателя: $a^n b^n = (ab)^n$, $2^n \cdot 5^n = 10^n$.

Сюда — своё

Ноль и минус в показателе

Показатель бывает не только натуральным. У обоих правил одно условие: основание не ноль.

- $a^0 = 1$ при любом ненулевом a.
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ — переворачивает дробь, знака числа не меняет.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ — то же для дроби, в одно действие.

Свойства степени при этом не меняются: при ненулевом основании все они верны и для нулевого показателя, и для отрицательного.

$(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$: вниз ушла степень, минус остался на месте.

Знак степени

У отрицательного основания знак степени решает чётность показателя, а что именно возводится — скобки. Положительное основание в любой степени положительно.

- Отрицательное в чётной степени положительно: $(-3)^2 = 9$.
- В нечётной — отрицательно: $(-3)^3 = -27$.
- $-3^2 = -9$, а $(-3)^2 = 9$: без скобок минус остаётся снаружи.

В буквах то же: $(-a)^2 = a^2$, а $(-a)^3 = -a^3$.

Ловушка: четыре записи, похожие на правило

Все четыре выглядят как свойство степени, и ни одна им не является.

- $a^2 + a^3 \neq a^5$ — короче не записывается.
- $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ — скобку раскрывают перемножением.
- $-a^2 \neq (-a)^2$ — слева возводится a, справа $-a$.
- 0^0 значения не имеет: $a^0 = 1$ объявлено только для ненулевого основания.

Складывать степени можно только как подобные слагаемые: $a^2 + a^2 = 2a^2$, и показатель при этом не меняется.

Первые два — об одном: свойства степени сворачивают умножение и деление, а сложение не сворачивают. Третье — о том, что именно стоит под показателем, четвёртое — о границе: у a^0 основание не ноль.

Сюда — своё