Формулы сокращённого умножения

Формулы, которые читают в обе стороны. Подстановка чисел ловит неверное равенство, но верного не доказывает.

Квадрат суммы и квадрат разности

Квадрат двучлена — три слагаемых: квадрат первого, удвоенное произведение, квадрат второго. Знак среднего — тот, что стоял между буквами.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Крайние слагаемые всегда со знаком плюс: квадрат отрицательным не бывает. Меняется только средний.

На числах: $21^2 = (20+1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$,
$19^2 = (20-1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$.

Разность квадратов

Разность квадратов раскладывается на два множителя: разность и сумму тех же букв. Суммы квадратов среди формул нет.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Порядок букв здесь решает знак: $a^2 - b^2$ и $b^2 - a^2$ противоположны. У квадрата разности наоборот — $(a-b)^2$ и $(b-a)^2$ равны.

$49 - x^2 = (7-x)(7+x)$, на числах $101 \cdot 99 = 100^2 - 1^2 = 9999$.

Отсюда же $\dfrac{b-a}{a-b} = -1$ при любых различных a и b.

Откуда они берутся: проверка за полминуты

Формулу можно не помнить, а получить: квадрат скобки — это та же скобка, умноженная сама на себя. Куб — та же скобка трижды: $(a-b)^3$ получают так же, перебором.

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Средний член удвоенный именно поэтому: ab и ba — одна буквенная часть, и таких слагаемых два.

Разность квадратов проверяется так же:
$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2$, средние уничтожились.

Сюда — своё

Справа налево: как узнать формулу в выражении

Справа налево формула раскладывает на множители, и нужно это чаще. Три слагаемых: крайние — квадраты, средний — удвоенное произведение тех двух, что возведены в квадрат, со своим знаком; этот знак и уходит в скобку. Два квадрата с минусом между ними — это разность квадратов.

- ☐ $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$: $9 = 3^2$, а $6x = 2 \cdot x \cdot 3$.
- ☐ $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$: в квадрат идёт весь одночлен, $(2x)^2 = 4x^2$.
- ☐ $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$: два квадрата и минус между ними.
- ☐ $x^2 + 5x + 9$ не сворачивается: у $(x+3)^2$ средний член $6x$, а не $5x$.

Узнать мешает порядок: $9 + x^2 + 6x$ — тот же квадрат суммы, слагаемые переставлены.

Сумма и разность кубов

Разность и сумма кубов тоже раскладываются: скобка из двух букв и скобка из трёх. Знак в короткой скобке — как в исходном выражении, у среднего члена длинной — противоположный.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Длинная скобка — не квадрат двучлена: в ней ab без двойки. Её так и называют — неполный квадрат.

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$: восемь — это 2^3.

Ловушка: четыре записи, за которыми нет формулы

Все четыре выглядят как формулу сокращённого умножения. Ни за одной её нет.

- ☐ $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ — верно $a^2 + 2ab + b^2$.
- ☐ $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$ — это не разность квадратов, верно $a^2 - 2ab + b^2$.
- ☐ $a^3 - b^3 \neq (a-b)^3$ — верно $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
- ☐ $a^2 + b^2$ на множители не раскладывается: формулы суммы квадратов нет.

Первые три — об одном: одну формулу приняли за другую, и все три убивает подстановка $a = 2$, $b = 1$. Четвёртое о другом: там формулы нет вовсе, и искать её не надо.