Разложение на множители

Как сумму превратить в произведение. Подстановка чисел ловит неверное равенство, но верного не доказывает.

Разложить — значит превратить сумму в произведение

Разложить на множители — переписать сумму так, чтобы последним действием стало умножение. Пока последним остаётся сложение или вычитание, разложения нет.

$$3x + 6 = 3(x + 2)$$

Проверка у разложения всегда одна и та же — раскрыть скобки обратно. Не сошлось с исходным, значит разложено неверно.

$x^2 - x = x(x - 1)$, обратно $x \cdot x - x \cdot 1 = x^2 - x$ — сошлось.

Общий множитель за скобку

Общий множитель есть в каждом слагаемом без исключения. Его выносят за скобку, а в скобке пишут то, что получится, если каждое слагаемое на него разделить.

$$ka + kb = k(a + b)$$

Выносят наибольший: у чисел — их наибольший общий делитель, у буквы — наименьший показатель, который встретился.

$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$, $a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$.

Минус за скобку

Минус — такой же множитель, и выносится так же. Все знаки в скобке при этом меняются на противоположные.

$$-a - b = -(a + b) \qquad b - a = -(a - b)$$

Вторая запись нужна чаще всех: $a - b$ и $b - a$ отличаются только знаком, и любая из них переписывается через другую.

$-2x - 6 = -2(x + 3)$: вынесли -2, и знак сменился у обоих слагаемых.

Сюда — своё

Группировка: когда слагаемых четыре

Четыре слагаемых без общего множителя пробуют разбить на пары и разложить каждую. Появился общий множитель — выносят его ещё раз.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$
$$= (x + y)(a + b)$$

Общего множителя не вышло — пары разбиты не так: слагаемые переставляют и пробуют другую пару. Разбиений всего три; не подошло ни одно — парами здесь не сгруппировать.

Перед второй парой минус — выносят его вместе с множителем:
$ax + ay - bx - by = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b)$.

Какой способ и в каком порядке

Способов три, и порядок у них жёсткий: сначала общий множитель, дальше смотрят, сколько слагаемых осталось.

- ☐ Общий множитель пробуют **всегда первым**: он бывает при любом числе слагаемых.
- ☐ Осталось два слагаемых — ищут формулу: разность квадратов, сумма или разность кубов.
- ☐ Осталось три — ищут квадрат двучлена.
- ☐ Осталось четыре — пробуют группировку парами.
- ☐ Не подошло ничего — бывает и так: разложения нет или нужен способ не с этого листа.

Работа не окончена, пока раскладывается хоть один множитель: $2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x - 2)(x + 2)$.

Ловушка: разложение, которого не вышло

Три записи с неверным разложением и одно выражение, которое не раскладывается вовсе.

- ☐ $5a + 5 \neq 5a$ — единица на месте слагаемого не исчезает; верно $5(a + 1)$.
- ☐ $-a - b \neq -(a - b)$ — при выносе минуса меняются оба знака; верно $-(a + b)$.
- ☐ $a^2 + ab \neq a^2(1 + b)$ — вынесен не тот множитель; верно $a(a + b)$.
- ☐ $2a + 3b$ на множители не раскладывается: общего множителя нет, формулы тоже.

Первые три убивает подстановка $a = 2$, $b = 1$. Обратное раскрытие убивает их надёжнее: оно проверяет запись целиком, а не в одной точке.