Квадратный корень

Что значит знак $\sqrt{}$ и что с ним можно делать. Подстановка чисел ловит неверное равенство, но верного не доказывает.

Что такое квадратный корень

$\sqrt{a}$ — то неотрицательное число, которое в квадрате даёт a. И само a под корнем неотрицательно.

$$\sqrt{25} = 5 \qquad (\sqrt{a})^2 = a$$

Слово «корень» занято дважды: корень числа пишут знаком $\sqrt{}$, и знак даёт одно число; корень уравнения — его решение, и решений бывает два. $\sqrt{25} = 5$, а ± 5 — решения $x^2 = 25$.

$\sqrt{-4}$ не существует: квадратом отрицательное число не получить. А $\sqrt{0} = 0$ — ноль под корнем законен.

Корень из квадрата: откуда берётся модуль

Корень из квадрата равен не самому числу, а его модулю: корень неотрицателен, а возводят в квадрат любое число.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$|a|$ — это само a, когда оно неотрицательно, и $-a$, когда отрицательно: $|7| = 7$ и $|-7| = 7$.

$\sqrt{(-7)^2} = 7$, а не -7. Модуль снимают только тогда, когда про a известно, что оно неотрицательно.

Корень из произведения и из частного

Корень распределяется по умножению и по делению — и больше ни по чему.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Обе верны, пока под корнями нет отрицательного, а в дроби знаменатель не ноль.

Справа налево ими считают: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.

Сюда — своё

Вынести множитель из-под корня и внести обратно

Из-под корня выносят множитель, который стоит там квадратом: наружу идёт корень из него. Внести обратно — значит возвести неотрицательный множитель в квадрат.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \qquad 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

Выносят наибольший квадрат, который делит число: у $\sqrt{72}$ это 36, и выходит $6\sqrt{2}$. Если квадратом стоит буква, наружу идёт её модуль: $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$; без модуля пишут только тогда, когда про a известно, что оно неотрицательно. Вносят только неотрицательный множитель: $-3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$, минус остаётся снаружи.

Внесение ещё и сравнивает: $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$. Из большего числа корень больше, значит $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$.

Корень в знаменателе

От корня внизу избавляются так: числитель и знаменатель умножают на одно и то же, подобранное так, чтобы внизу корень исчез.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Внизу один корень — умножают на него же; внизу корень и число — на ту же разность с другим знаком, и срабатывает разность квадратов.

Значение дроби при этом не меняется: умножали на $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, то есть на единицу.

Ловушка: четыре записи про корень, и ни одной верной

Три равенства, которых нет, и одна запись, которой не существует.

- ☐ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ — формулы для корня из суммы нет вовсе: $\sqrt{9+16} = 5$, а $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
- ☐ $\sqrt{a^2} \neq a$ — при отрицательном a неверно; верно $|a|$.
- ☐ $\sqrt{25} \neq \pm 5$ — знак корня даёт одно число; верно 5.
- ☐ $\sqrt{2}$ десятичной дробью точно не записывается: $1{,}41$ — округление, и в ответе оставляют $\sqrt{2}$.

Первые два убивает подстановка: $a = 9$, $b = 16$ и $a = -7$. Третий подстановкой не убить — он не про счёт, а про то, что означает сам знак.

Сюда — своё