# Алгебраические дроби

Что с дробью можно делать и при каких значениях букв она вообще существует. Подстановка чисел ловит неверное равенство, но верного не доказывает.



## Что такое алгебраическая дробь и когда она есть

**Алгебраическая дробь — деление одного выражения на другое. На ноль не делят, поэтому при значениях букв, обращающих знаменатель в ноль, дроби нет вовсе.**

$$\frac{2a}{a-3} \qquad \frac{a-1}{a^2}$$

Запрет ищут у знаменателя и только у него: у первой дроби под запретом $a=3$, у второй — $a=0$. Числитель запретов не ставит.

Ноль сверху законен: $\frac{0}{5}=0$. Запрет живёт внизу.

## Сокращение: делят только на множитель

**Числитель и знаменатель можно разделить или умножить на одно и то же, кроме нуля, — дробь не изменится. Делят только на множитель.**

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b} \qquad \frac{2a+2}{a+1}=2$$

Слагаемое не сокращается, поэтому верх и низ сперва раскладывают на множители — вынесением общего множителя, группировкой или формулами сокращённого умножения.

Сокращение запретов не снимает: $\frac{a(a-3)}{a-3}=a$, но $a=3$ под запретом по-прежнему.

## Минус и порядок букв

**Минус у дроби можно ставить куда угодно — перед дробью, сверху или снизу: значение не меняется. А поменять местами уменьшаемое и вычитаемое — значит сменить знак.**

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b} \qquad \frac{b-a}{a-b}=-1$$

Вторая дробь равна $-1$, пока $a$ и $b$ различны: $b-a=-(a-b)$, и минус выносят ко всей дроби.

Два минуса уходят вместе: $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

**Сюда — своё**

## Умножение и деление

**Дроби умножают по отдельности: верх на верх, низ на низ. Делят — умножением на перевёрнутую.**

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Знаменатели не ноль всегда, а при делении не ноль ещё и $c$ — оно уходит вниз. Сокращать дешевле до перемножения, а не после.

$\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$: общий множитель сократили, перемножать не пришлось.

## Сложение и вычитание: общий знаменатель

**Складывают и вычитают только дроби с одинаковым знаменателем: знаменатель оставляют, числители складывают. Разные знаменатели сперва приводят к общему.**

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

Общий знаменатель — то, что делится на оба: произведение знаменателей годится всегда, короче — добавить каждой дроби только недостающие множители. Вычитая, знак меняют у всего числителя, а не у первого слагаемого.

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}$ — здесь общий знаменатель и есть произведение.

## Ловушка: правило применили не туда

**Три равенства, которых нет, и одна запись, которой не существует.**

- ☐ $\frac{a+c}{b+c}\neq\frac{a}{b}$ — сокращать нечего: $c$ здесь слагаемое, а не множитель.
- ☐ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\neq\frac{a+c}{b+d}$ — верно $\frac{ad+bc}{bd}$.
- ☐ $\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ — числитель разбить можно, знаменатель нельзя.
- ☐ $\frac{a}{0}$ не существует вовсе: это не ноль и не $a$.

Первые три убивает подстановка: $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$. Четвёртый убивать нечем — подставлять в него нечего.

**Сюда — своё**